

معرفی چند کاربرد علم آمار در موسیقی شناسی

مریم غلامی^۱

چکیده

صوت پدیده‌ای است که انسان آن را با یاری دستگاه شنوایی خویش درک می‌کند. اغلب قطعات موسیقی به گونه‌ای است که انسان از شنیدن آن لذت برده و ناخود آگاه نظم و هماهنگی خاصی را در آن می‌یابد. از آنجا که علم آمار یکی از علوم کاربردی است در واقع علم و عمل استخراج، بسط و توسعه دانش‌های تجربی انسان‌هاست. در این مقاله سعی شده است تا با کمک علم آمار و با استفاده از روش‌های گردآوری، تنظیم، پرورش و تحلیل داده‌های تجربی وجود چنین نظم و هماهنگی تایید شود. در این مقاله چند کاربرد علم آمار در موسیقی شناسی معرفی گردیده و همچنین سعی شده تا با معرفی روش‌های کاربردی داده‌کاوی و همچنین اصول توصیف و استنباط در آمار چگونگی مدل سازی قطعات موسیقی معرفی گردد. علاوه بر این از دیدگاه فرکتال‌ها و نظریه آشوب نیز به این مقوله نگاه شده است و در انتها، روشی که به کمک قوانین بیز، آکورد کروماتیک و سرکلید یک قطعه موسیقی را برآورد می‌کند، معرفی شده است.

واژه های کلیدی: موسیقی شناسی، نت، آکورد، فرکانس، داده‌کاوی، نظریه آشوب، فرکتال‌ها، برآورد بیز.

۱- مقدمه

تعیین شاخصه‌های ارتباطی بین موسیقی و ریاضیات اولین گام محققان در بررسی علم آمار و ریاضیات در موسیقی بوده و این بررسی از آنجا شکل می‌گیرد که موسیقی را از تکرار برخی اصوات در بازه مشخصی از زمان تعریف می‌کنند و بر همین اساس، طول مدت هر صوت را می‌توان اندازه گرفت و به روابطی میان آن‌ها در بازه زمان دست پیدا کرد و می‌توان قطعات موسیقی را مورد تحلیل و بررسی قرارداد. موضوع دیگر بررسی ارتباط فرکانسی^۲ میان نت‌های مختلف موسیقی و همچنین ارتباط میان نت‌ها و زیبایی شناسی است که

اغلب در مباحث مربوط به فیزیک صوت^۴ بررسی می‌گردد. این ارتباط همچنین می‌تواند تحلیل ریاضی گونه از انواع سبک‌های هارمونی و یا انواع روش‌های ساخت ملودی و... باشد. پس یکی از ارتباط‌های مهم موسیقی و علوم ریاضی مدل کردن رفتار موسیقی با کمک روابط ریاضی است. علم موسیقی شناسی^۵ شاخه‌ای از هنر موسیقی یا شاید بهتر آن باشد که بگوییم شاخه‌ای از علم است که در آن به بررسی منطقی و استدلالی مباحث موسیقی پرداخته می‌شود. زمینه‌هایی که علم موسیقی شناسی در آن وارد می‌شود شناسایی مدل‌ها و سیستم‌های شنیداری در هر آهنگ است [۵]. بنابراین

^۲ به دو معنی به کار می‌رود: واحد صدایی با فرکانس ثابت و صورت نوشتاری برای هر صدا

^۴Acoustics

^۵Musicology

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد آمار اقتصادی اجتماعی دانشگاه علامه

طباطبایی

^۳ دفعات تکرار یک رویداد تکرار شونده در واحد زمان

این علم با کمک علم آمار و احتمال می‌تواند شروع به شناسایی مدل‌ها از جنبه‌هایی ویژه کند.

۲- کدام قسمت از موسیقی بوسیله مدل‌های کمی توصیف می‌شود؟

بعضی‌ها معتقدند که موسیقی برگرفته از آشوب‌های ذهنی آهنگساز یا نوازنده است ولی با توجه به انواع موسیقی می‌توان آن را برگرفته از عوامل مختلف دانست. این اختلاف نظر در زمینه عوامل به وجود آورنده موسیقی باعث شد، محققان و پژوهشگران درصدد یافتن روش‌های آنالیز و تحقیق و قضاوت در مورد قطعات موسیقی باشند. همان‌طور که می‌دانید، در موسیقی، شنوایی تأثیر به‌سزایی در قضاوت راجع به معیارهای خوبی و بدی (پیدا کردن بیشتر عوامل سازنده موسیقی) دارد. کارها از همین‌جا مشکل می‌شود که متوجه می‌شویم چون بیشتر با یکی از حواس درگیر هستیم، هیچ معیار مناسبی برای اعلام درستی و نادرستی ندارد و این شرایط با شرایط قضاوت علوم کمی در مغایرت است. به همان اندازه که برای تشخیص خوبی و بدی با حواس درگیریم، برای این‌که یک قطعه موسیقی را با حفظ تمام شرایط به صورت کمی در بیاوریم نیز دچار مشکل هستیم. پژوهشگرانی که در این زمینه کار می‌کنند، تحقیقات خود را بر این موضوع متمرکز کرده‌اند که آیا می‌توان معیاری را در نظر گرفت و از دیدگاه کمی به موسیقی نگاه کرد؟

هر قطعه موسیقی ضبط شده ممکن است با یک یا چند ساز نواخته شده باشد این نوع موسیقی را موسیقی چند صدایی^۱ می‌گویند که از بر هم نهی اصوات سازهای مختلف تشکیل می‌شود. پس در اکثر قطعات با یک صدا یا یک صوت سرو کار نداشته بلکه با ترکیبی از اصوات سروکار داریم [۲]. پس برای تحلیل قطعات موسیقی در اکثر مواقع به عنوان اولین گام موسیقی را به صورت تک صدایی در نظر می‌گیرند و بسیاری از عواملی که در اصل به یک قطعه موسیقی شکل می‌دهد نادیده گرفته می‌شود.

نکته شایان ذکر در این است که آثاری که از گذشته تا به حال باقی مانده است به دو صورت موجوداند، به صورت نوشتاری یا به صورت ضبط شده. پس برای پیدا کردن یک مدل و یا ساختار باید از این دو منبع استفاده کرد. قدم اول در تحلیل قطعات موسیقی استخراج اطلاعات (داده‌ها) از انواع موسیقی در دسترس ماست.

صدا از آن‌جا که در بحث‌های تئوری موسیقی به بررسی آن می‌پردازند دارای مشخصات خاصی است: نواک (زیر و بمی یا کلفتی و نازکی)، دیرند (زمانی که هر صدای موسیقی ادامه می‌یابد)، شدت (ضعف یا قوی بودن) و طنین و رنگ (شخصیت صوتی یا شیوش). موسیقی دارای خصیصه است که به کمک علائم ویژه می‌توان آن را ثبت کرد برای همه این صداها موسیقایی از بم‌ترین آنها تا زیرترین آنها نشانه‌های قرار دادی و بین المللی وجود دارد که به آنها نت گفته می‌شود. بررسی نت‌ها از یک جهت آسان‌تر است که می‌توان هر نت را به عنوان یک تک صدا در نظر گرفت و مورد بررسی قرار داد.

داده‌کاوی نیز نوعی استخراج اطلاعات و دانش از داده‌هایی است که شاید به ظاهر پیچیده و غیر قابل استفاده باشد ولی بنا به نوع استخراج اطلاعات، در داده‌کاوی توانایی استفاده از داده‌ها برای پیش بینی و یا اطلاعات برای توصیف و طبقه‌بندی موجود می‌باشد [۸].

۲-۱- تحلیل بر اساس صورت نوشتاری موسیقی

داده‌کاوی به بهره‌گیری از ابزارهای تجزیه و تحلیل داده‌ها به کشف الگوها و روابط معتبری که تاکنون ناشناخته بوده‌اند، اطلاق می‌شود. این ابزارها ممکن است مدل‌های آماری یا الگوریتم‌های ریاضی باشند. داده‌کاوی منحصر به گردآوری داده‌ها نبوده و تجزیه و تحلیل اطلاعات و پیش بینی را نیز شامل می‌شود [۸]. با استفاده از روش‌های داده‌کاوی برای قطعه موسیقی که به صورت نوشتاری موجود است، میزان تکرار یک نت با دیرندهای متفاوت را می‌توان مشخص کرد و با استفاده از این اطلاعات مدل مناسب را

داده‌کاوی است که البته این روش برای قطعات ضبط شده نیز کاربرد دارد.

روش دیگری را که در تحلیل داده‌های نوشتاری می‌توان از آن استفاده کرد، برازش مدل بر روی نمودارهای فراوانی نت در یک قطعه موسیقی است که با استفاده از این روش می‌توان وارد حیظه آمار استنباطی شد. در شکل ۱، میزان تکرار یک نت در یک قطعه موسیقی مورد بررسی قرار گرفته است.

برازش داد. برای مثال چند کاربرد داده‌کاوی در تجزیه و تحلیل داده‌ها در زیر ذکر شده است:

۱- استفاده از روش طبقه‌بندی

همان‌طور که ذکر شد اگر نت قطعات موسیقی موجود باشد، با استفاده از روش‌های طبقه‌بندی می‌توان با استفاده از نوع و تکرار نت‌ها و با کمک اصول هارمونی با داشتن تنها قسمتی از یک قطعه موسیقی، می‌توان پیش‌بینی برای ادامه قطعه به دست آورد.

۲- استفاده از روش خوشه‌بندی

با استفاده از روش خوشه‌بندی می‌توان یک قطعه موسیقی که از چند تکرار مستقل تشکیل شده‌اند، هر کدام را به نوعی خوشه‌ها در نظر گرفت و با استفاده از این قوانین، توصیفی را برای کل قطعه ارائه داد.

۳- استفاده از روش دنباله‌ای

این الگو به تجزیه و تحلیل توالی رویدادها پرداخته و مشخص می‌کند. کدام رویداد، رویدادهای دیگری را در چه فاصله زمانی در پی دارد. همان‌طور که علم هارمونی وجود یک پیوند و ارزش ساختمانی خاصی و همچنین ملودیک و درونی بین نت‌ها را تایید می‌کند پس پیدا کردن قوانین برای توصیف قطعات کار ناممکنی نیست. از دیدگاه این مقاله اصلی‌ترین روش برای توصیف قطعات پیدا کردن الگوی دنباله‌ای است. زیرا این الگو با تمام تعاریفی که از قطعات موسیقی و ملودی ارایه می‌شود کاملاً منطبق است. زیرا پیدا کردن الگوی دنباله‌ای در یک فاصله زمانی مشخص و یافتن تکرارهای آن در یک قطعه به نوعی عملی‌تر از بقیه روش‌های

صدای موسیقی را به صدای فرعی و اصلی تقسیم کرد و این دوتایی همگی به نوعی دارای توابع ریاضی هستند [۴].

۳- مدل کلی بر اساس فرکانس غالب قطعه

در سال ۱۹۷۵ ویس و کلارک^۲ سخنرانی تاثیرگذاری داشتند که این سخنرانی برای تحقیقات در زمینه موسیقی محرکی اصلی به حساب می‌آید این دو محقق بر این نظر بودند که: "قطعات موسیقی ساختار استناداری $1/f$ -noise را دارد." این نتیجه براساس تحلیل‌های سری‌های زمانی که از موسیقی ضبط شده به دست آمده حاصل شد [۲].

آنها معتقد بودند، ابتدا باید توسط فیلترهای صوتی، اصواتی با فرکانس خیلی بالا و یا خیلی پایین را حذف کرد یا تغییر داد (با استفاده از روش‌های موجک یا تبدیل‌های فوریه) و سپس اصوات باقی‌مانده را به عنوان سری زمانی مورد مطالعه قرار داد که البته آنها مدل استناداری را ارایه دادند که همان $1/f$ (یک بر روی فرکانس) بود. به نوعی می‌توان گفت از منظر این دو محقق ساختارهای فرکانسی از دیدگاه تجربی مورد بررسی قرار گرفت.

$1/f$ -noise به خودی خود تصادفی نیست. برای مثال اگر موسیقی ترکیبی را در نظر بگیریم متوجه می‌شویم نوعی سازمان‌یافتگی خاص بین اصوات وجود دارد. مدل‌بندی کردن یک چنین موسیقی با یک مدل تصادفی نیازمند یک توزیع تجربی است. این توزیع تجربی با کمک مدل تصادفی به دست می‌آید.

برای آگاهی از صحت مدل برازش داده شده، می‌توان با چند بار آزمایش کردن یا شبیه‌سازی و جمع‌آوری مشاهدات با حفظ بقیه شرایط نتیجه‌گیری کرد که آیا مدل، مدل مناسبی است یا خیر؟ بعضی اوقات مدل، مدل قوی و تصمیم‌گیرنده ای برای کل کار است. برای مثال اگر قطعه‌ای موسیقی مورد نظر ما در آزمون فرض $f = 0/1$ HZ پذیرفته شود به این معنی است که به صورت متناوب و با یک فرکانس مشخص قطعه شنیده شود [۲].

روش‌های دیگری مانند کدگذاری کردن نت‌ها در یک ملودی و... نیز وجود دارد. برای مثال اگر یک گام از یک قطعه ضبط شده را داشته باشیم از تکنیک‌های رگرسیون برای برازش مدل بر روی آن قطعه می‌توان استفاده کرد و همچنین بررسی هر قطعه در یک زمان مشخص، با تمرکز بر روی یک زمان مشخص و یک گام موسیقایی، می‌توان هر نت را به وسیله دو دسته از علائم نشان داد، X برای یک زمان مشخص و Y برای یک گام و با این روش علامت‌گذاری، قطعات را کد گذاری کرد و سپس می‌توان مدل مناسب را برازش داد و از روش رگرسیون برای پیش بینی و یا تحلیل استفاده کرد [۱].

۲-۲- تحلیل بر اساس موسیقی ضبط شده

همان‌طور که در ابتدا بیان شد، انسان با شنیدن قطعات موسیقی پی به وجود نظم و هماهنگی خاصی در آن می‌برد. برای مثال وجود انسجام خاص در سمفونی‌های بتهوون توجه شنونده را به وجود روابطی خاص معطوف می‌کند و با گوش دادن به سمفونی شنونده احساس می‌کند، موسیقی همیشه با او همراه است. این نکته ظریف که در اکثر قطعات موسیقی قوی دنیا قابل مشاهده است، برای مثال در کارهای باخ، بتهوون، موزارت و ... و همچنین در موسیقی اصیل هر کشور مثلاً فرانسه، یونان، ایران، هند و ... قابل لمس است [۶]. یکی از راه‌های پیشنهادی در این زمینه نگاه به موسیقی از دیدگاه فیزیک صوت یا اکوستیک است. به بیانی دیگر هر قطعه موسیقی به صورت مجموعه‌ای از امواج صوتی بررسی می‌شود.

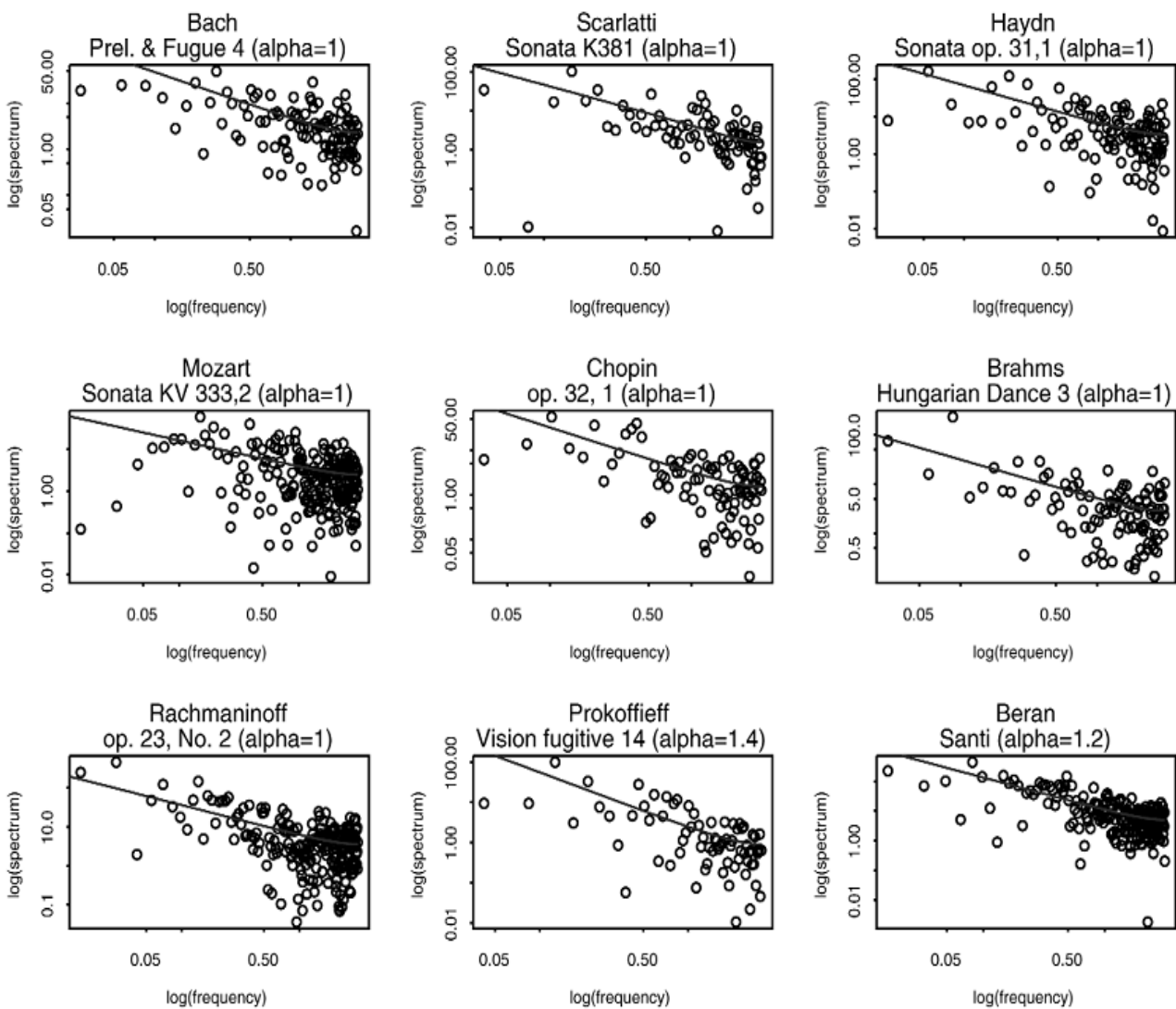
بررسی امواج صوتی موسیقی به صورت سیستماتیک برای اولین بار توسط هلمهولتز^۱ مطرح شد و اکنون به عنوان یک شاخه علمی مجزا به آن نگاه می‌شود. وقتی به ساختارهای قطعات موسیقی دقیق‌تر نگاه می‌کنیم می‌توان دید که صداهای موسیقایی با طنین‌های گوناگون هر یک دارای یک منحنی است. صدایی که ما می‌شنویم، دارای یک طول موج با دامنه اصلی است و در واقع دندان‌های آن هر یک از تاثیر موجی فرعی حاصل می‌شود، به طوری که می‌توان هر موج نماینده

^۲Voss and Clarke

^۱Helmholtz

ویس و کلارک در قسمت دوم نظریاتشان نظریه قبلی را به نوعی کامل کردند. آنها اینگونه مطرح کردند که: تمام قطعات موسیقی برای خود یک نوع رفتار دارند که با $1/f$ در تناسب است و می توان یک فرکانس واحد را برای هر نت به عنوان نماینده آن نت قرار داد.

آزمونی که راجع به آن صحبت کردیم آزمون تک صدایی بود ولی در موسیقی واقعی تکرارها و اجراها دقیق نیست و چنین آزمونی جواب صحیح را به ما نمی دهد. تئوری فرضی بر روی این گونه توزیع های تکرار شدنی، استفاده از متغیرهای مشابه یا همان برآورد شده در توزیع است که با استفاده از روش های توزیع آن را برازش می دهند. با این روش ارتباطی بین سیگنال های موسیقی و داده های موسیقی و فرآیند تصادفی می یابند. کار اصلی فرآیند تصادفی خلاصه کردن تغییرات و داده هایی است که از قطعه به دست می آید.



شکل ۲ نمودار لگاریتم فرکانسی سمفونی های مختلف اجرا شده توسط موزیسین های مختلف

۵- برآورد سرکلید و آکورد کروماتیک با استفاده

از روش بیز

قبل از معرفی روش برآورد سرکلید و آکورد کروماتیک^۴ باید ارتباط بین نت‌ها، آکورد و سرکلید را بیان کرد. نت به جز معنایی که در قبل ذکر شد به معنای واحد صدایی با فرکانس ثابت نیز مطرح می‌شود. سرکلیدها کمک بسیار خوبی برای نزدیک شدن به تنالیته موسیقی می‌کنند. اگر نت‌های گام به قصد تصنیف یک آهنگ ترتیشان به هم بخورد می‌گویند آن آهنگ در تنالیته آن گام است و گام عبارت است از تعدادی اصوات پی در پی که بافاصله معین و حساب شده به دنبال هم قرار می‌گیرند. که آخرین نت آن هنگام^۵ بالایی (بم‌تر) نت اول باشد. بنابراین در هر گام آنچه اهمیت دارد تعداد اصوات پیاپی و نیز فاصله میان آن‌هاست. این عاملی است که نوع گام را تعیین می‌کند. هر یک از اصوات منظم و پی در پی را درجه گام می‌نامند. گام‌ها از هر نت که آغاز شوند به دو گروه کلی تقسیم می‌شوند:

کروماتیک و دیاتونیک.

گام کروماتیک گامی است با آغاز از هر نت به فاصله‌ی نیم پرده‌ای درجه را طی کرده به تدریج بالا می‌رود تا در صوت سیزدهم به هنگام نت آغاز برسد. هر گام کروماتیک به فاصله‌های مساوی تقسیم می‌شود و می‌توان درجات آن را با نشانه‌های مختلف یعنی نت‌ها نام گذاری کرد.

نواختن سه یا بیشتر نت‌ها را با هم و یا در یک فاصله زمانی آکورد^۶ گویند. آکورد با یک بردار باینری ۱۲ تایی نمایش داده می‌شود و به‌ازای نت‌های نواخته شده در هر آکورد یک و بقیه خانه‌های این بردار صفر می‌باشد. فرض کنید یک صدای آکوستیک یا یک مجموعه صدا از یک قطعه موسیقی را به یک دنباله از N پیشامد تبدیل کنیم که هر کدام نماینده یک آکورد باشند هر پیشامد صوتی توسط یک بردار مشاهداتی مشخص شده‌اند و مجموعه آن‌ها به صورت $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ نمایش داده می‌شوند. هدف تعیین کردن نام سرکلید k_n و

با توجه به تمام مشاهداتی که در این زمینه داشتند و شکل ۲ که لگاریتم فراوانی فرکانس چند قطعه را نشان می‌دهد می‌توان دید برازش هر خط دارای شیب منفی است که این شیب منفی را با تقریبی از خود امواج مشخص می‌کنند. براساس نتایج به دست آمده بیان کیفی از موسیقی، یافتن یک نوع ارتباط احتمالاتی بین موسیقی و $1/f$ -noise است.

۴- نظریه آشوفتگی^۱ و فرکتال‌ها

ساختارهایی که هر جزء آن با کل مجموعه یکی است و فقط در مقیاس^۲ تفاوت دارند را ساختارهای خود متشابه^۳ می‌گویند. فرکتال‌ها جزییات نامحدودی دارند که دارای ساختار خود متشابه‌اند، که در مقادیر مختلف بزرگنمایی هستند. در اکثر موارد یک قانون و قاعده خاص به میزان نامحدودی تکرار می‌شود تا طرح فرکتال پدید آید. در نظریه فرکتال‌ها نوعی شباهت بین اجزا و کل قابل تشخیص است. بدین ترتیب که هر جز از الگو همانند و مشابه کل می‌باشند و دارای خاصیت خود مانایی است. یعنی همه اعضا یک هدف را دنبال می‌کنند.

در کاربرد این علم می‌توان این‌گونه مطرح کرد که با پیدا کردن یک ساختار برای میزان یا قسمت کوچکی از یک قطعه موسیقی و تعمیم آن به کل قطعه به نتایج شگرفی می‌توان دست پیدا کرد. زیرا همه میزان‌ها در یک قطعه خاص ارتباط نزدیک موسیقایی دارند. فرکتال‌ها یک نقطه شروع برای ساخت موسیقی شدند و جرجیو لیجتی با کمک نظریه فرکتال‌ها کنسرت پیانو برگزار کرد [۲]. بررسی فرکتال‌ها در یک قطعه چگونگی ترکیب آواها را بیان می‌کند. هماهنگی موجود در موسیقی به وسیله این نظریه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

⁴Key lable

⁵Chord chroma

⁶Octave

⁷ Chord

¹Chaos

²Scale

³Self-semilar

تحقیقاتی پژوهشی کاربرد فراوانی دارد و استفاده از آن برای ساختن قطعات مناسب نیست. موسیقی امری کاملاً عقلانی نیست و در جواب این سوال که چه میزان از یک قطعه موسیقی را می‌توان از لحاظ کمی بیان کرد، می‌توان پاسخ صریح‌تری داد که به وسیله یک مدل ریاضی یا آماری می‌توان ساختار به‌طور تقریبی قانونمندی به آن داد ولی این ساختار بیان‌کننده هر آن چیزی که در قطعه موسیقی شنیده می‌شود، نیست.

۷- آینده تحقیق

با توجه به این‌که کشور ما دارای منبع غنی از فرهنگ و موسیقایی است و ردیف دستگامی موسیقی سنتی ما دارای نظم و هماهنگی خاصی است [۷]. با کمک گرفتن از روش‌هایی که در این مقاله ذکر شد شاید بتوان ساختار احتمالی خاصی برای آن پیدا کرد.

منابع

- [1]. Beran, J. (2003). *Statistics in Musicology*, Chapman and Hall, 1st Ed., CRC Press.
- [2]. Beran, J. (2004). 'Music-Chaos, Fractals and information'. *Chance*, 17, 4, 7-16.
- [3]. Martens, J.P., Cateau, B. and Leman, M. (2007). A probabilistic frame work for audio-based tonal key and chord recognition. *Advances in Data Analysis*.
- [4]. Mansoori, P., (2008). *Basic music theory*, Karname.
- [5]. Nafari, B. (2000). *Comprehensive information of music*. Marlik.
- [6]. Poortorab, M. (2001). *Theory of music*, Cheshme.
- [7]. Talai, D. (1993). *The new approach to music theory of Persian art*, sales.
- [8]. Tan, P., Steinbach, M. and Kumar, V. (2006). *Introduction to Data Mining*. Addison Wesley, US Ed.

بردارهای کروماتیک آکورد C_n برای این پیشامدها می‌باشد. به‌طور دقیق‌تر به دنبال زوج مرتب (\hat{K}, \hat{C}) هستیم که احتمال پسین $P(K, C|X)$ را ماکزیمم کند. با به کار بردن قانون بیز و با در نظر گرفتن استقلال احتمال پسین $P(X)$ از (K, C) به این نتیجه می‌رسیم که این مسئله را می‌توان به صورت زیر نیز فرمول بندی کرد:

$$\hat{K}, \hat{C} = \arg \max_{K, C} P(K, C, X) \\ = \arg \max_{K, C} P(K, C)P(X|K, C),$$

با در نظر گرفتن مد ماژور و مینور هارمونیک و با امتحان کردن ۴ حالت اصلی مجموعه‌های سه تایی^۱ یعنی ماژور، مینور، افزوده و کاسته برای هر آکورد به این نتیجه می‌رسیم که تنها ۴۸ بردار آکورد و ۲۴ سرکلید برای همه پیشامدهای ممکن وجود دارد و با کمک بردار مشاهدات و کل حالات موجود می‌توان توزیع درست‌نمایی صوتی $P(X|K, C)$ را به شکل زیر تعریف کرد:

$$P(X|K, C) = \prod_{n=1}^N P(x_n | k_n, c_n).$$

و اگر $P(K, C)$ این‌گونه بیان شود:

$$P(K, C) = \prod_{n=1}^N P(k_n, c_n | k_{n-1}, c_{n-1}).$$

آنگاه به طور مستقیم نشان داده می‌شود که مسئله می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\hat{K}, \hat{C} = \arg \max_{K, C} \prod_{n=1}^N P(k_n | k_{n-1}, c_{n-1}) \\ \times P(c_n | k_{n-1}, c_{n-1}, k_n) P(X_n | k_n, c_n),$$

که جواب نهایی بر آورد بیز سرکلید k_n و بردار های کروماتیک آکورد C_n خواهد بود [۳].

۶- نتیجه‌گیری

برخی از آهنگسازان از این روش‌ها برای ساخت آهنگ‌ها استفاده کرده‌اند. با وجود این از نظر روانشناسان استفاده از این مدل‌ها برای ساخت آهنگ مانع از رشد خلاقیت شده و فقط با این روش می‌توان تعداد کثیری آهنگ تولید کرد. از این رویافتن مدل برای قطعات موسیقی تنها از دیدگاه

^۱Triads